

reichten hinteren Gegendruck von  $p_G = 3,0$  Torr<sup>11</sup> ergeben.

In Tab. 1 sind die für diese Bedingungen geltenden spezifischen Aufwandsgrößen mit den Werten verglichen, die sich beim freien Strahl unter der Forderung nach einem kleinsten spezifischen Ansaugvolumen ergeben<sup>2</sup>.

Man bemerkt, daß die spezifische Kompressionsarbeit beim umgelenkten Strahl etwas größer, die spezifische Schlitzlänge dagegen etwas kleiner ist als beim freien Strahl. Der größte Unterschied zeigt sich bei dem spezifischen Ansaugvolumen, das beim umgelenkten Strahl nahezu doppelt so groß wie beim freien Strahl ist. Der Effekt ist qualitativ verständlich, da zur Erzeugung des umgelenkten Strahls

eine doppelt so weite Düse wie zur Erzeugung des freien Strahles benutzt wurde.

Bei der Beurteilung des Ergebnisses hat man zu berücksichtigen, daß die Versuchsbedingungen beim freien Strahl in einem erheblich größeren Bereich als beim umgelenkten Strahl variiert worden sind. Man kann daher annehmen, daß sich beim umgelenkten Strahl durch weitere Variation der Versuchsbedingungen günstigere Aufwandsgrößen erzielen lassen.

Herrn Dr. K. BIER danken wir für wertvolle Diskussionen. Für die Hilfe bei der Durchführung der Versuche und der massenspektrometrischen Analyse danken wir Fräulein B. GEBAUER, Herrn K. MAURER und Herrn G. SCHÜLER.

## Magnetfelder in rotierenden Plasmen unter quasistationären Bedingungen

Von H. P. BAGINSKI und W. LOCHTE-HOLTGREVEN

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel  
(Z. Naturforsch. 16 a, 960—972 [1961]; eingegangen am 12. April 1961)

Durch eine Knallgasflamme mit Kalium-Natrium-Zusatz wird ein rotierendes thermisches Plasma geringen Ionisationsgrades erzeugt. Die Versuchsbedingungen sind so gewählt, daß die Elektronen und Ionen eine gegenüber den Neutralteilchen kleine makroskopische Anfangsgeschwindigkeit besitzen. Infolgedessen werden die Ladungsträger-Komponenten durch Stöße mit den Neutralteilchen beschleunigt, und zwar unterschiedlich stark. Die dadurch entstehenden elektrischen Kreis-Ströme rufen Magnetfelder hervor, die experimentell nachgewiesen und theoretisch interpretiert werden.

In einer theoretischen Untersuchung zeigt BIERMANN, daß im Falle potentialloser Beschleunigungen in einem vollionisierten Plasma elektrische Ströme fließen und infolgedessen Magnetfelder auftreten müssen<sup>1</sup>. SCHLÜTER betrachtet als Modell eines Plasmas eine Flüssigkeit, die aus drei Komponenten (Ionen, Elektronen und Neutralteilchen) besteht<sup>2</sup>. Von der Impulsbilanz ausgehend läßt sich das Problem theoretisch behandeln.

Der erste experimentelle Nachweis von Magnetfeldern, die bei der Rotation quasineutraler Plasmen auftreten, gelang SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN<sup>3</sup>. An jene Versuche, die mit einem mittels Sauerstoff und Propan betriebenen Brenner durchgeführt wurden, schließt die vorliegende Arbeit an.

Die Versuchsbedingungen werden in vielfacher Weise variiert, und auch bei der Auswertung der Ergebnisse werden andere Wege beschritten; dadurch können experimentelle Fehlerquellen und rech-

nerische Vernachlässigungen, die damals noch in Kauf genommen werden mußten, beseitigt werden. Die Meßergebnisse können nur dann richtig gedeutet werden, wenn man ein Plasma mit Neutralgas entsprechend den Vorstellungen von SCHLÜTER zugrunde legt.

### 1. Die Versuchsanordnung

#### a) Brenner

Der Erzeugung des rotierenden Plasmas dienen zwei verschiedene Brenntypen, die sich hinsichtlich der Strömungsverhältnisse unterscheiden.

Beide Brenner werden, um eine möglichst hohe Temperatur und damit eine möglichst große elektrische Leitfähigkeit zu erzielen, mit Wasserstoff und Sauerstoff im stöchiometrischen Mischungsverhältnis betrieben. Die Zündung des Knallgases erfolgt durch eine Funkenstrecke, die von einem Induktor gespeist wird. Das Plasma entsteht durch Einspritzen einer Legierung aus Kalium und Natrium (Verhältnis 4 : 1). Dabei werden

<sup>1</sup> L. BIERMANN, Z. Naturforsch. 5 a, 65 [1950].

<sup>2</sup> A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 6 a, 73 [1951].

<sup>3</sup> P. O. SCHILLING u. W. LOCHTE-HOLTGREVEN, Z. Naturforsch. 9 a, 520 [1954].



die Ladungsträger im wesentlichen vom Kalium geliefert, das die geringere Ionisationsenergie besitzt. Das Legieren mit Natrium (mittels einer Wirbelstromheizung) erfolgt, um einen bei Zimmertemperatur flüssigen Aggregatzustand zu erhalten.

Bei beiden Apparaturen schließt sich an den Brennerkopf, in dem das Plasma erzeugt wird, nach unten ein 20 cm langes Führungsrohr aus Jenaer Glas mit einem Innendurchmesser von 4,6 cm an, das durch einen rotierenden Wasserfilm von innen gekühlt wird. Innerhalb dieses Führungsrohres, das vom Plasma durchlaufen wird, entstehen die zu untersuchenden Magnetfelder.

In den Brenner A strömt der Wasserstoff vertikal durch eine zentrisch angebrachte Düse, während der Sauerstoff mit hoher Geschwindigkeit tangential zugeführt wird, um das Gasgemisch in Rotation zu versetzen. Die K-Na-Legierung wird zentrisch innerhalb des Wasserstoffstromes eingespritzt. Nach dem Verdampfen werden die Kalium- und Natriumatome sowie die durch thermische Ionisation entstehenden Ionen und Elektronen durch die Flammengase in Rotation versetzt. Die in tangentialer Richtung auf die Ladungsträger wirkenden Beschleunigungskräfte sind potentiallos, so daß nach BIERMANN eine gegenseitige Diffusion der Ionen und Elektronen nicht durch ein elektrostatisches Feld verhindert werden kann. Es müssen also azimutale Ströme fließen, die Magnetfelder parallel zur Brennerachse hervorrufen. Da das Plasma gleichzeitig eine konstante Vertikalkomponente der Geschwindigkeit besitzt, bewegen sich die Ladungsträger auf Schraubenlinien durch das Führungsrohr, wobei deren ortsabhängiger Neigungswinkel ein Maß für die Tangentialgeschwindigkeiten und die Änderung des Neigungswinkels ein Maß für die auftretenden potentiallosen Beschleunigungen im Sinne der BIERMANNSchen Theorie darstellt.

In den Brenner B (Abb. 1) strömen Sauerstoff und Wasserstoff tangential ein. Das Gasgemisch hat im Vergleich zum Brenner A eine nur kleine Vertikalkomponente, aber eine große Tangentialkomponente der Geschwindigkeit. Die K-Na-Legierung wird *exzentrisch* vertikal zugeführt, so daß die Kalium- und Natriumatome wie auch die entstehenden Ladungsträger bereits in der Nähe der Einspritzdüse die Rotationsgeschwindigkeit des Wasserstoff-Sauerstoffgemisches annehmen, um anschließend mit nahezu konstanter Winkelgeschwindigkeit das Glasrohr zu durchlaufen. Während also beim Brenner A entlang des Führungsrohres potentiallose Beschleunigungskräfte auftreten, sind diese beim Brenner B auf ein kleines Volumen beschränkt<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Der potentiallose Anteil der Beschleunigung und damit die Ströme sind bei beiden Brennertypen azimutal um die Symmetrie- und Rotationsachse gerichtet. Das resultierende Magnetfeld liegt dann in Richtung der Brennerachse und kann mit einer außen um den Brenner gelegten Induktionsspule gemessen werden. Herr BIERMANN machte freundlicherweise darauf aufmerksam, daß in seiner Arbeit unterschiedlich zu dem hier beschriebenen Experiment der potentiallose Anteil der Beschleunigung des rotierenden Plasmas radial gerichtet war (unterschiedliche

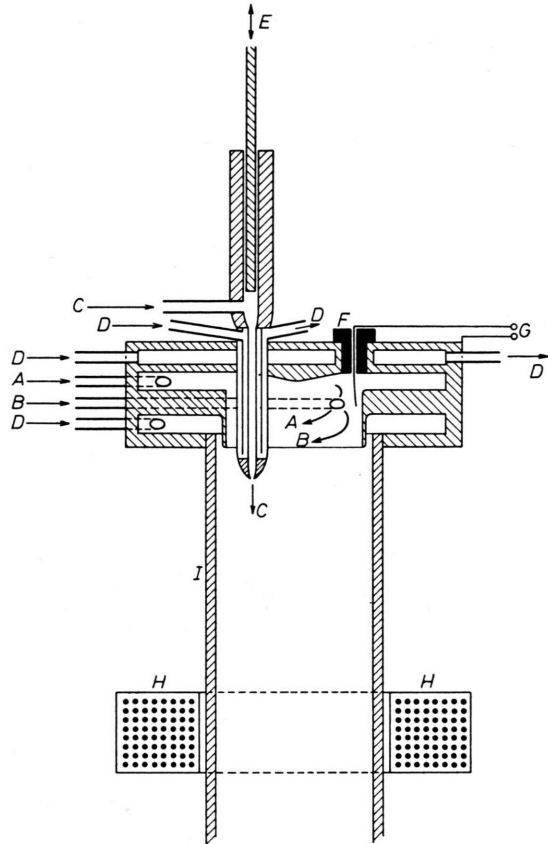


Abb. 1. Schematische Darstellung des Brenners B. A) Sauerstoff. B) Wasserstoff. C) K-Na-Legierung. D) Kühlwasser. E) Eingeschliffener Kolben zur Modulation der Legierungszufuhr. F) elektrische Isolation. G) Anschluß für Funkeninduktor. H) Spule für die Magnetfeldmessungen. I) Glasrohr.

Um die auftretenden Magnetfelder induktiv messen zu können, muß die elektrische Leitfähigkeit in beiden Brennern moduliert werden. Dies geschieht durch intermittierende Einspritzung der K-Na-Legierung mit einer Frequenz von 30 Hz<sup>5</sup>. Eine Presse, die von einem Synchronmotor über eine Spindel angetrieben wird, drückt für die Dauer von 8 min eine zeitlich gleichbleibende Menge der Legierung in das Zuleitungsrohr zum Brenner. Oberhalb der Einspritzdüse bewegt sich ein eingeschliffener Kolben mit einer Hublänge von 1 mm und einer Frequenz von 30 Hz auf und nieder. Dabei wird

Rotationsgeschwindigkeit in z-Richtung); der resultierende Strom fließt daher in der BIERMANNSchen Betrachtung in der Meridionalebene und die durch den Strom erzeugten Magnetfelder umschließen die Rotationsachse.

<sup>5</sup> Bei den Experimenten von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN erfolgte die Modulation der elektrischen Leitfähigkeit durch intermittierende Sauerstoffzufuhr mit einer Frequenz von 720 Hz. Dabei mußte auch eine Modulation der Strömungsverhältnisse in Kauf genommen werden.

die Legierung abwechselnd nach oben angesaugt und nach unten in den Brenner gedrückt. Dies ruft eine entsprechende Modulation der Ladungsträgerzahl/cm<sup>3</sup> im Plasma hervor. Da die später beschriebene Meßanordnung für die Magnetfelder bei einer so tiefen Frequenz nur eine geringe Bandbreite aufweist, muß die Legierung mit sehr konstanter Frequenz in den Brenner gelangen. Aus diesem Grunde wird der Kolben von einem Synchronmotor über Kegelzahnräder und Exzenter, also schufffreie Übertragungselemente, betrieben.

Mit dem intermittierenden Einspritzen ist kein wesentlicher Eingriff in die stationären Strömungsverhältnisse im Brenner verbunden, weil das Molverhältnis von Kalium-Natrium zu Flammgasen (Wasserstoff und Sauerstoff) nur etwa 1 : 40 beträgt.

Der Brenner A entspricht — abgesehen von den stationären Strömungsverhältnissen, den *quasistationären* Magnetfeldern, von der Änderung des Brenngases und der geometrischen Dimensionen — dem bei den Versuchen von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN verwendeten Prinzip. Er ermöglicht deshalb den Anschluß an die damals durchgeführten Experimente, die mit Hilfe der BIERMANNSchen Theorie interpretiert wurden.

Der Vorteil des Brenners B liegt, wie erwähnt, darin, daß die Beschleunigungskräfte auf ein kleines Volumen unterhalb der Düse beschränkt sind, der übrige Teil des Brenners dagegen frei von tangential gerichteten Beschleunigungen ist. Mit dieser Konstruktion läßt sich die Frage beantworten, ob nur dort Magnetfelder auftreten, wo die Winkelgeschwindigkeit des Plasmas sich ändert. Auf die Strömungsverhältnisse im Brenner B lassen sich im übrigen — wie später gezeigt wird — die Plasmagleichungen von SCHLÜTER relativ leicht anwenden.

#### *b) Photographische Apparatur zur Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Plasma*

Um die zu erwartenden Magnetfelder berechnen zu können, müssen die Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen des Plasmas in tangentialer Richtung bestimmt werden.

Auf Grund der beschriebenen Brennerkonstruktionen bewegen sich die hell leuchtenden Plasmaelemente auf Schraubenlinien in axialer Richtung durch das Glasrohr. Spritzt man nur winzige Mengen von Kalium-Natrium in den Brenner, so bilden sich diskrete Schraubenlinien, die photographiert werden können. Wegen der hohen Axialgeschwindigkeit der Gase müssen die Belichtungszeiten dabei in der Größenordnung einer zehntausendstel Sekunde liegen. Zu diesem Zweck läßt man vor dem Kameraobjektiv eine Scheibe mit einem schmalen Durchlaßsektor rotieren, deren Umlaufzeit auf die Öffnungszeit des Kameraverschlusses abgestimmt ist.

Aus den Neigungswinkeln der Schraubenlinie lassen sich nun die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten berechnen, wenn die Axialgeschwindigkeit bekannt

ist. Zu deren Bestimmung wird der jeweilige Brenner auf eine rotierende Filmtrommel senkrecht zu deren Bewegungsrichtung abgebildet. Um Mehrfachbelichtungen zu vermeiden, gibt ein Verschuß den Strahlengang nur für die Dauer eines Filmlaufes frei. Die so entstehende Aufnahme stellt ein Weg—Zeit-Diagramm der Plasmafront bezüglich der axialen Komponente dar.

Beim Brenner A lassen sich aus den ortsabhängigen Tangentialgeschwindigkeiten die Beschleunigungen bestimmen. Beim Brenner B ist nur die Ermittlung der Endgeschwindigkeit des Plasmas möglich, die mit der Geschwindigkeit des Wasserstoff-Sauerstoff-Gemisches übereinstimmt. Die sehr hohen Plasma-Beschleunigungen in Düsen-Nähe dagegen lassen sich auf experimentellem Wege nicht bestimmen.

#### *c) Spektroskopische Apparatur zur Bestimmung von Elektronendichte und elektrischer Leitfähigkeit*

Zur Berechnung der Magnetfelder muß außer den Strömungsverhältnissen in den Brennern auch die elektrische Leitfähigkeit (für die BIERMANNSche Theorie) bzw. die Elektronendichte = Ionendichte (für die SCHLÜTERsche Theorie) bekannt sein.

Die Verteilung dieser Größen in axialer und radialer Richtung läßt sich über die Intensitätsverteilung von Spektrallinien (siehe 2 b) bestimmen<sup>6</sup>. Dazu dient ein Drei-Prismen-Spektrograph der Firma Zeiss.

Der jeweilige Brenner wird unter Verwendung eines achromatischen Linsensystems und eines Umlenkspiegels so abgebildet, daß die Achse des Glasrohres bei einem Abbildungsmaßstab von 1 : 16 senkrecht zum Spektrographenspalt liegt. Dieser wiederum wird im Verhältnis 2 : 1 auf die photographische Platte abgebildet, so daß die Spektrallinien einen 8-fach verkleinerten Horizontalschnitt durch den Brenner darstellen. Da die gesamte optische Anordnung sich auf einem POHLSchen Tisch vertikal bewegen läßt, kann man während eines Versuchs eine Serie solcher Schnitte in verschiedenen Höhen des Brenners photographieren.

Durch die Wahl geeigneter Filter wird eine Belichtungszeit von 12 sec für jede Aufnahme ermöglicht, wobei die Photoplatte wegen der Modulationsfrequenz von 30 Hz über den zeitlichen Intensitätsverlauf von 360 Plasmawirbeln integriert. Der dadurch bedingte photographische Intermitzenzeffekt ist bei einer Impulsdauer von 1/60 sec und einem zeitlichen Impulsabstand von ebenfalls 1/60 sec zu vernachlässigen.

Für die Auswertung der Aufnahmen ist es notwendig, die Dispersionskurve des Spektrographen sowie die Schwärzungskurve der photographischen Platte zu kennen und außerdem die Intensitäten mit einem Strahlungsnorm zu eichen. Erstere wird mit einem Eisenbogen aufgenommen. Zur Bestimmung der Schwärzungskurve dienen ein Stufenfilter mit bekannten Durchlässigkeiten vor dem Spektrographenspalt sowie ein Kohlebogen als Lichtquelle. Da dessen spektrale Energieverteilung bekannt ist, wird er gleichzeitig als

<sup>6</sup> SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN bestimmten bei ihren Versuchen die elektrische Leitfähigkeit durch Sondenmes-

sungen. Dabei konnte nicht die axiale und radiale Verteilung, sondern nur der Mittelwert gemessen werden.



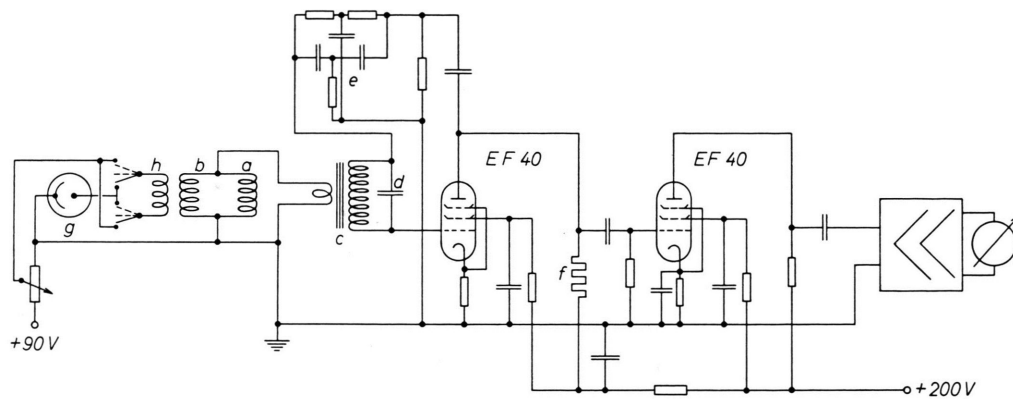


Abb. 2. Schaltschema der elektronischen Meßanlage. a) Meßspule, b) Kompensationsspule, c) Transformator, d) Kondensator, e) Gegenkopplungsfilter, f) Drahtwiderstand, g) Photozelle, h) Photozellen-Spule.

Strahlungsnormal benutzt. Belichtungszeit und Raumwinkel der gemessenen Strahlung sind die gleichen wie bei den Aufnahmen vom Brenner.

Da bei der elektronischen Magnetfeld-Messung nur reine Sinusschwingungen verstärkt werden (siehe 1 d), ist noch die Kenntnis des zeitlichen Intensitätsverlaufs notwendig. Zu diesem Zweck wird ein Punkt in der Mitte des Brenners auf eine Photozelle abgebildet, die mit einem Oszillographen verbunden ist. Analysiert man die fotografierten Oszillogramme nach FOURIER, so läßt sich in Verbindung mit den spektroskopischen Ergebnissen die hier allein interessierende 30 Hz-Sinus-Komponente der Elektronendichten bzw. elektrischen Leitfähigkeiten ermitteln.

#### d) Elektronische Anlage zur Messung der Magnetfelder

Die im jeweiligen Brenner erzeugten magnetischen Wechselfelder induzieren in einer 2 cm langen Meßspule (a in Abb. 2), die sich auf dem Glasrohr in axialer Richtung verschieben läßt, elektrische Spannungen. Eine mit den Daten dieser Spule übereinstimmende zweite Spule (b) außerhalb des Brenners ist so geschaltet, daß in beiden Spulen induzierte Störspannungen sich gegenseitig kompensieren. Zur Vermeidung von Mikrophonieeffekten sind die Spulen mit Wachs vergossen, von Blei umgeben und auf Schaumgummi gelagert.

Die induzierten Spannungen werden von einem Transformator (c) entsprechend seinem Übersetzungsverhältnis von 1 : 500 hochtransformiert. Zum Schutz gegen magnetische Störungen ist er von einem MU-Metallgehäuse umgeben. Parallel zur Sekundärwicklung des Transformators liegt ein Kondensator (d), der mit ihr zusammen einen Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz von 30 Hz bildet.

Dadurch werden Störungen aus anderen Frequenzbereichen, vor allem aus dem frequenznahen Stromnetz, weitgehend abgeschwächt. Dem gleichen Zweck wie die-

ser Schwingkreis dient ein Gegenkopplungsfilter (e) zwischen dem Transformator und der ersten Verstärkerstufe. Die Schaltelemente dieses T—T-Filters sind so bemessen, daß seine Durchlässigkeit bei 30 Hz ein Minimum aufweist. Gemeinsam mit dem vorher beschriebenen Schwingkreis bestimmt das Gegenkopplungsfilter die Resonanzkurve des Verstärkers. Die Bandbreite beträgt 4 Hz. Zur Vermeidung von Mikrophonieeffekten enthalten die beiden ersten Verstärkerstufen die besonders unempfindliche und auf Schaumgummi gelagerte Röhre EF 40. Als Anodenwiderstand in der ersten Stufe dient ein Drahtwiderstand, der sich durch besonders geringe Rauschspannungen auszeichnet (f).

An den zweistufigen Vorverstärker schließt sich ein dreistufiger Breitbandverstärker an, dessen Ausgang mit einem Anzeige- und Registriergerät verbunden ist. Die Zeitkonstante dieser Anordnung beträgt 2 sec.

Geeicht wird diese Meßanlage in Einheiten des magnetischen Flusses ( $\text{Gauß} \cdot \text{cm}^2$ ). Dazu wird in das Glasrohr eine kreisförmige Drahtschleife gebracht und über einen Vorwiderstand mit einem Wechselstrom der Frequenz 30 Hz liefert. Mit Hilfe der Methode des Vektorpotentials läßt sich bei bekannter Stromstärke und bekanntem Durchmesser der Drahtschleife der die Meßspule durchsetzende magnetische Fluß berechnen (siehe 3 a) <sup>7</sup>.

Neben dem Betrag der Magnetfelder interessiert auch deren Richtung. Diese Frage ist gleichbedeutend mit derjenigen, ob die Elektronen (wie nach der Theorie zu erwarten ist) oder die Ionen den beschleunigenden Kräften schneller folgen.

Zur Richtungsbestimmung wird eine Photozelle (g in Abb. 2) benutzt, die stets auf denjenigen Teil des Brenners gerichtet ist, der sich gerade im Inneren der Meßspule befindet. Diese Photozelle ist mit einer Spule (h) verbunden, die innerhalb der Kompensationsspule (b) angebracht ist. Da jeder Plasmawirbel wegen der thermischen Anregung der Kalium- und Natriumatome mit einer hellen Leuchterscheinung verbunden ist, wird

<sup>7</sup> Der Vergleich von Theorie und Experiment ist über den magnetischen Fluß exakter möglich als über die magneti-

sche Feldstärke, die bei den Versuchen von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN benutzt wurde.



beim Durchlaufen der Meßspule jedesmal, also 30-mal in der Sekunde, ein Photozellenstrom erzeugt, der seinerseits in der Kompensationsspule eine elektrische Spannung *bekannter* Richtung induziert. Die Resultierende aus dieser Spannung und der vom Plasma in der Meßspule induzierten Spannung wird verstärkt und zur Anzeige gebracht. Durch Umpolen des Photozellenstromes während des Versuchs ergibt sich am Registriergerät entweder eine Zunahme oder eine Abnahme des Ausschlags. Daraus läßt sich schließen, ob vor oder nach dem Umpolen die Spannungen in der Meß- und in der Kompensationsspule gleichsinnig waren. Daraus wiederum läßt sich eindeutig auf die Richtung der Magnetfelder im Brenner schließen.

Eine schematische Darstellung der gesamten Anlage ist in Abb. 3 wiedergegeben.

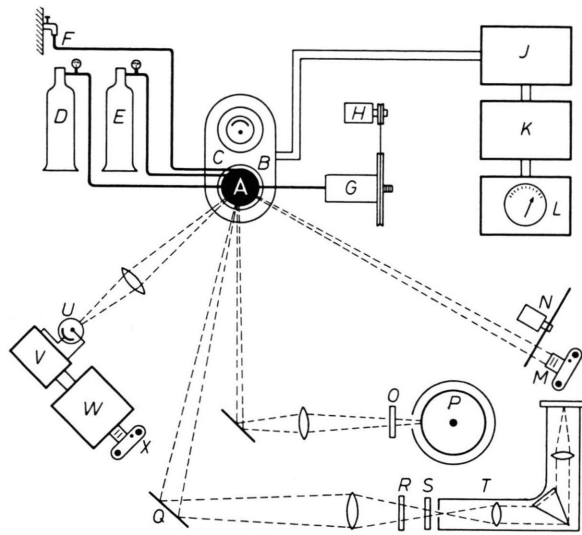


Abb. 3. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung. A) Brenner, B) Meßspule, C) Kompensationsspule mit Photozelle, D) Wasserstoff, E) Sauerstoff, F) Kühlwasser, G) Kalium-Natrium-Presse, H) Antriebsmotor für die Presse, J) Vorverstärker, K) Breitbandverstärker, L) Anzeige- und Registriergerät für die Magnetfelder, M) Kamera für Kurzaufnahmen, N) rotierende Sektorscheibe, O) Verschluss, P) rotierende Filmtrommel (Weg-Zeit-Diagramm), Q) Umlenkspiegel, R) Filter, S) Verschluss, T) Drei-Prismen-Spektrograph, U) Photozelle, V) Spannungsversorgung für die Photozelle, W) Oszillograph (Anzeige des zeitlichen Intensitätsverlaufs), X) Kamera (Aufnahme der Oszillogramme).

## 2. Ergebnisse

### a) Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

Die axialen Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  in den beiden Brennern betragen:

$$\begin{aligned} \text{Brenner A: } v_z &= 2500 \text{ cm/sec,} \\ \text{Brenner B: } v_z &= 850 \text{ cm/sec.} \end{aligned}$$

Abb. 4 zeigt als Kurzaufnahme, wie sich im Brenner A die Plasmaelemente auf Schraubenlinien

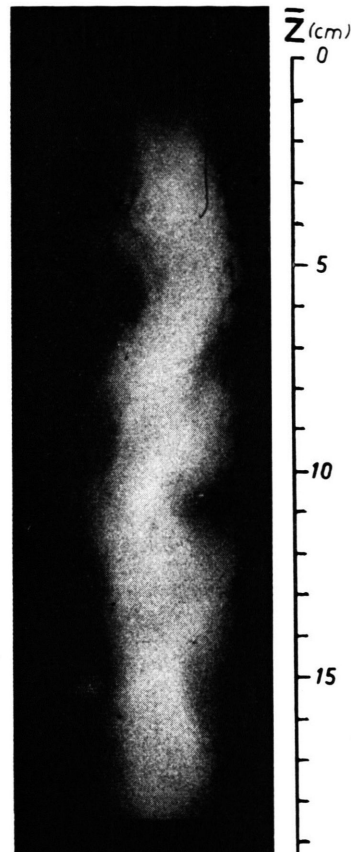


Abb. 4. Kurzaufnahme des leuchtenden Plasmas im Brenner A.

durch das Glasrohr bewegen. (Bei Einspritzung der regulären K-Na-Menge/sec fügen sich die Schraubenlinien wegen der statistisch verteilten Anfangsrichtungen kontinuierlich aneinander, so daß sich zylindersymmetrische Verhältnisse ergeben.)  $\bar{z}$  gibt den Abstand vom oberen Glasrohrrende an. Die Ortsabhängigkeit der Schraubenlinien-Steigung weist auf das Vorhandensein von tangential gerichteten Beschleunigungen hin. Aus den Steigungen werden in Verbindung mit der oben angegebenen Axialgeschwindigkeit  $v_z$  die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten  $v_t$  in Abhängigkeit von  $\bar{z}$  berechnet. Daraus wiederum erhält man die gesuchten potentiallosen Beschleunigungen  $g^*$ , die in Abb. 5 als Funktion von  $\bar{z}$  dargestellt sind. Diese Werte gelten für die Außenbezirke des Brenners, die den Hauptanteil zum magnetischen Fluß liefern.

Anders liegen die Verhältnisse im Brenner B (Abb. 6). Eine wesentliche Beschleunigung des Plasmas tritt erwartungsgemäß nur in einem begrenzten Raum unterhalb der Düse auf. Wird die K-Na-Legierung vertikal eingespritzt, so wird der entste-

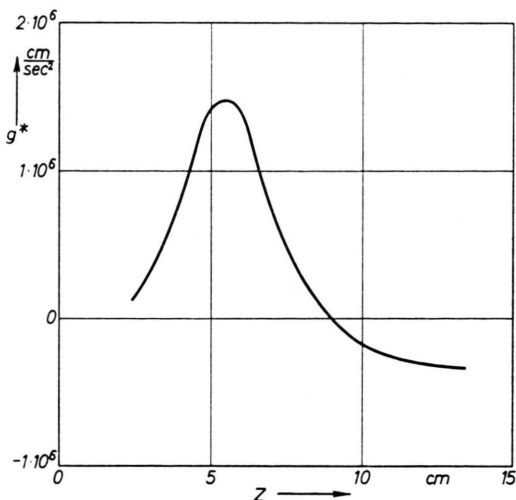


Abb. 5. Tangential gerichtete Beschleunigungen im Brenner A.

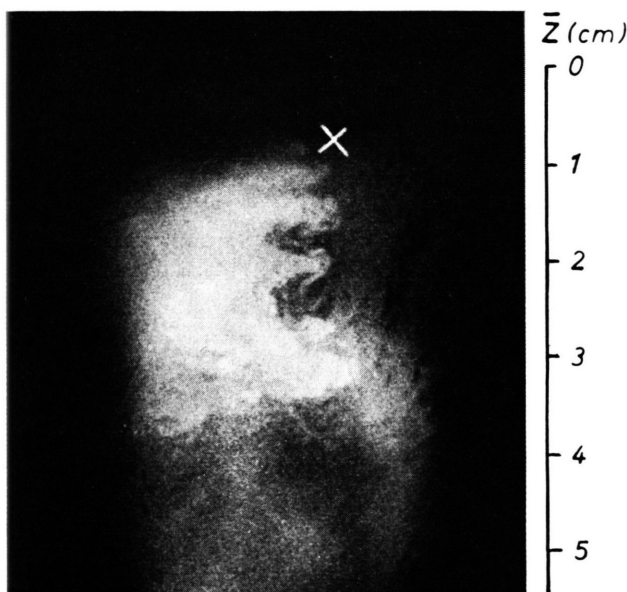


Abb. 6. Kurzzeitaufnahme des leuchtenden Plasmas im Brenner B (weißes Kreuz: K-Na-Düse).

hende Dampf durch das rotierende Wasserstoff-Sauerstoff-Gemisch fast rechtwinklig dazu abgelenkt. Der Ablenkwinkel läßt sich — genauer als aus der Photographie — an Hand eines gewissen Niederschlags am Glasrohr zu  $85^\circ$  bestimmen. Daraus ergibt sich in Verbindung mit der Axialgeschwindigkeit

keit eine Tangentialgeschwindigkeit der Flammengase von etwa 10 000 cm/sec. Über die Größe der Plasma-Beschleunigung läßt sich beim Brenner B experimentell nichts aussagen.

#### b) Elektronendichte und elektrische Leitfähigkeit

Zur Berechnung von Elektronendichte und elektrischer Leitfähigkeit wird die beim Übergang  $4^2P_{3/2} \rightarrow 7^2D_{5/2}$  entstehende, in Emission aus optisch dünner Schicht gewonnene Spektrallinie aus der 1. Nebenserie des Kaliums benutzt ( $\lambda = 5113 \text{ \AA}$ ). Die Natrium-Komponente des Plasmas wird vernachlässigt, weil das Natrium wegen der gegenüber Kalium höheren Ionisationsenergie und wegen des nur geringen Anteils in der Legierung weniger als 1% der Ladungsträger in den Brennern liefert.

Jede Spektrallinie liefert die Intensitätsverteilung  $I(\bar{x})$  in dem jeweiligen, auf den Spektrographenspalte abgebildeten Horizontalschnitt durch die Plasma-Säule. Daraus läßt sich unter der Voraussetzung zylindersymmetrischer Verhältnisse (Brenner A) die Strahlungsdichte  $i(\bar{r})$  als Funktion des Radius über eine ABELSche Integralgleichung nach HÖRMANN<sup>8</sup> berechnen.

Der Brennerquerschnitt wird dazu in 5 äquidistante konzentrische Kreise unterteilt (und eine innere Kreisfläche, die aber für den magnetischen Fluß und deshalb auch hinsichtlich der Elektronendichte und elektrischen Leitfähigkeit uninteressant ist). Innerhalb jedes Kreises wird die Strahlungsdichte als konstant angenommen. Entsprechend der Zahl dieser Zonen wird eine Hälfte der Spektrallinie an 5 Stellen in Querrichtung photometriert. Die Transformation von Schwärzungswerten in Intensitäten erfolgt nach Eingabe der Schwärzungskurve automatisch von einem Gerät, das von RICHTER<sup>9</sup> konstruiert wurde. Nach dem Planimetrieren der registrierten Intensitätsprofile lassen sich durch Vergleich mit dem Spektrum des Normalstrahlers die Absolutintensitäten  $I(\bar{x})$  ermitteln. Daraus erhält man nach dem oben erwähnten Verfahren schließlich  $i(\bar{r})$ .

Die absolute Übergangswahrscheinlichkeit für die benutzte Linie ist aus Messungen von VAN DER HELD und HEIERMANN in einer Acetylen-Luft-Flamme<sup>10a</sup> bekannt. In guter Übereinstimmung dazu steht der von COENEN und KRAMERS quantenmechanisch berechnete Wert<sup>10b</sup>. Da die mittlere Zahl von Kaliumatomen/cm<sup>3</sup>  $\bar{N}_k$  im Brenner aus der sekundlichen

<sup>8</sup> H. HÖRMANN, Z. Phys. **97**, 539 [1935].

<sup>9</sup> J. RICHTER, Z. Astrophys. **48**, 159 [1959].

<sup>10a</sup> E. F. M. VAN DER HELD u. J. H. HEIERMANN, Physica **3**, 31 [1936].

<sup>10b</sup> P. A. COENEN u. H. A. KRAMERS, Physica **3**, 341 [1936].

<sup>11</sup> Streng genommen errechnet man für  $\bar{N}_k$  die Summe aus neutralen K-Atomen/cm<sup>3</sup> und K-Ionen/cm<sup>3</sup>. Wegen des geringen Ionisationsgrades kann  $\bar{N}_k$  aber mit guter Genauigkeit auch als Zahl der K-Atome pro Kubikzentimeter aufgefaßt werden.

Einspritzmenge und der Axialgeschwindigkeit des Plasmas berechnet werden kann<sup>11</sup>, lassen sich über die Gleichung

$$\dot{v} = \bar{N}_k h \nu A_{nm} \frac{1}{4\pi} \frac{9n}{U} e^{-E_n/kT} \left[ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec} \cdot \text{Grad}} \right] \quad (2, 1)$$

mit den Zahlenwerten

$$\begin{aligned} \bar{N}_k &= 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \text{ (mittlere Zahl der K-Atome pro cm}^3 \text{, Brenner A),} \\ h \nu &= 3,88 \cdot 10^{-12} \text{ erg,} \\ A_{nm} &= 0,32 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1} \text{ (Übergangswahrscheinlichkeit nach VAN DER HELD und HEIERMANN),} \\ g_n &= 6 \text{ (statistisches Gewicht),} \\ U &= 2 \text{ (Zustandssumme),} \\ E_n &= 6,47 \cdot 10^{-12} \text{ erg (Anregungsenergie des oberen Niveaus),} \\ k &= 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/Grad} \end{aligned}$$

die Temperaturen  $T$  in den einzelnen Kreisringen berechnen.

Mit Hilfe der nunmehr bekannten Temperatur-Verteilung kann man über die SAHA-Gleichung die radikale Verteilung der Elektronendichte  $N_e$  (= Ionendichte  $N_i$ ) ermitteln. Im vorliegenden Falle der Quasineutralität gilt für  $N_e = N_i = N_p$  (Plasmateilchen eines Vorzeichens/cm<sup>3</sup>):

$$N_p = \sqrt{\bar{N}_k \cdot \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3}} e^{-\chi/kT} [\text{cm}^{-3}] \quad (2, 2)$$

mit den Zahlenwerten

$$\begin{aligned} m_e &= 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ g (Elektronenmasse),} \\ \chi &= 6,95 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 4,34 \text{ eV (Ionisationsenergie).} \end{aligned}$$

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  eines quasineutralen Plasmas bei Anwesenheit von Neutralgas ist nach SCHLÜTER<sup>2</sup> gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma_{ie}} + \frac{1}{\sigma_{en} + \sigma_{in}}; & \sigma_{ie} &= \frac{e^2}{\alpha_{ie}}; \\ \sigma_{en} &= \frac{N_p e^2}{N_n \alpha_{en}}; & \sigma_{in} &= \frac{N_p e^2}{N_n \alpha_{in}} \end{aligned} \quad (2, 3)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \alpha_{ie} &\approx 1,9 \cdot 10^{-27} T^{-3/2}, \\ &\quad \cdot [6,7 - \frac{2}{3} \log N_p + 2 \log T], \\ \alpha_{en} &\approx 9,4 \cdot 10^{-37} T^{1/2}, \\ \alpha_{in} &\approx 2,2 \cdot 10^{-32}, \\ e &= 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ E.S.E.} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{in g} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1} \\ \text{(s. Anm. }^{12}\text{).} \end{array} \right.$$

Wegen  $\alpha_{in} \geq 400 \alpha_{en}$  bei  $T \leq 3000^\circ \text{K}$  vereinfacht sich (2, 3) zu

$$\sigma = \frac{N_p e^2}{N_p \alpha_{ie} + N_n \alpha_{en}} [\text{sec}^{-1}]. \quad (2, 4)$$

<sup>12</sup> Die Werte für  $\alpha_{ie}$ ,  $\alpha_{en}$  und  $\alpha_{in}$  sind nach SCHLÜTER einer Arbeit von COWLING entnommen.

Die einzige noch unbekannte Größe  $N_n$  (Anzahl der Neutralteilchen/cm<sup>3</sup>) läßt sich über den Gesamtdruck im Brenner berechnen, der nur unwesentlich über dem Atmosphärendruck liegt. Wegen des geringen Molverhältnisses von Kalium zu Wasserstoff und Sauerstoff und wegen des kleinen Ionisationsgrades (Größenordnung: 0,01) läßt sich dabei der Ladungsträgerdruck vernachlässigen.

Erhält man auf diesem Wege durch eine einzige Spektrallinie die radiale Verteilung von  $N_p$  und  $\sigma$  in einer bestimmten Höhe  $\bar{z}$  des Brenners, so ergibt die Auswertung der in verschiedenen Höhen photographierten Spektren die gesamte axiale und radiale Verteilung dieser Größen.

In Analogie zur Unterteilung des Querschnittes in kreisförmige Zonen wird der Brenner auch in Längsrichtung unterteilt. In jedem Volumenelement, dessen Größe durch  $\bar{r}_i$ ,  $\Delta \bar{r}$  und  $\Delta \bar{z}$  gegeben ist, werden die Elektronendichte  $N_{vik}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  und die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_{ik}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  als konstant angenommen. Die so ermittelten Plasmagrößen werden noch geringfügig korrigiert, weil für ihre Berechnung der räumliche Mittelwert der Anzahl der Kaliumatome pro cm<sup>3</sup>  $\bar{N}_k$  zugrunde liegt:

Abgesehen von statistischen Schwankungen, die nicht berücksichtigt zu werden brauchen (die photographische Platte integriert über 360 Kalium-Einspritzungen!), ist eine gleichmäßige räumliche Verteilung der Kaliumatome zumindest in den oberen Brennerbezirken nicht gegeben, weil die Legierung in Form eines dünnen Strahls eingespritzt wird. Eine Vergleichsrechnung zeigt aber, daß selbst Abweichungen um einen Faktor 50 vom Mittelwert  $\bar{N}_k$  nach oben oder unten nur eine Änderung von etwa 50% in der Elektronendichte und der elektrischen Leitfähigkeit bewirken (bei vorgegebener Intensität der Spektrallinie!). Die obere Fehlergrenze von  $N_p$  und  $\sigma$  läßt sich über die Maximaltemperatur der Knallgasreaktion ( $T \approx 3000^\circ \text{K}$ ) abschätzen, die untere Fehlergrenze über die Annahme, daß die Temperatur nirgends unter  $2000^\circ \text{K}$  liegt. Da in Verlängerung der K-Na-Einspritzdüse allenfalls ein Überschuß, in den äußeren Brennerbezirken dagegen allenfalls ein Unterschuß von Kaliumatomen vorliegt, ist in jedem Falle die Richtung des Fehlers bekannt.  $N_{vik}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  und  $\sigma_{ik}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  können also entsprechend korrigiert werden, so daß unter ungünstigen Annahmen ein Fehler von  $\pm 25\%$  bleibt.

Eine zweite Korrektur ist notwendig, weil den Rechnungen auch der zeitliche Mittelwert der Anzahl der Kaliumatome/cm<sup>3</sup> zugrunde liegt. Für den späteren Vergleich von Theorie und Experiment interessiert aber, wie in Abschnitt 1 c bereits erwähnt, die Maximalamplitude der 30 Hz-Sinus-Komponente, die mit



dem zusätzlichen Index  $o$  bezeichnet werden soll, der Elektronendichte  $N_p$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$ , also:  $N_{p o i k}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  und  $\sigma_{o i k}(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$ .

Für diese Korrektur wird der oszillographisch dargestellte zeitliche Verlauf der Intensität  $I(t)$  an einem festen Punkt in der Mitte des Brenners benutzt. Da die Temperatur praktisch nicht moduliert wird (der für die Verdampfung, Anregung und Ionisation des Kaliums benötigte Energiebetrag kann hier vernachlässigt werden), ist die Intensität stets proportional der Zahl der Kaliumatome/cm<sup>3</sup>, also:  $I(t) \sim N_k(t)$ . Vernachlässigt man in (2, 4)  $N_p \alpha_{ie}$  gegenüber  $N_n \alpha_{en}$  (das minimal mögliche Verhältnis der beiden Größen beträgt bei den vorliegenden Bedingungen 1 : 7), so gilt — wieder bei

konstanter Temperatur — in guter Näherung:

$$\sigma(t) \sim N_p(t).$$

Unter Benutzung der SAHA-Gleichung bei konstanter Temperatur:  $N_p(t) \sim \sqrt[3]{N_k(t)}$  erhält man schließlich:  $\sigma(t) \sim N_p(t) \sim \sqrt[3]{N_k(t)} \sim \sqrt[3]{I(t)}$ .

Durch die FOURIER-Analyse der Funktion  $\sqrt[3]{I(t)}$  ermittelt man als Maximalamplituden der 30 Hz-Sinus-Komponente:

$$N_{p o} = 0,4 N_p \quad \text{und} \quad \sigma_o = 0,4 \sigma.$$

Die für den Brenner A so berechneten elektrischen Leitfähigkeiten sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Beim Brenner B dagegen ist die Voraussetzung der Zylindersymmetrie nicht erfüllt (exzentrische Düse!). Das Verfahren von HÖRMANN zur Berechnung der radialen Strahlungsdichte-Verteilung  $i(\bar{r})$  läßt sich also — zumindest in den oberen Brennerbezirken — nicht anwenden. Es wird deshalb eine Abschätzung über die Dicke der strahlenden Plasmaschicht in dem interessierenden Beschleunigungsgebiet unterhalb der Düse vorgenommen. Variiert man die Schichtdicke  $\Delta \bar{r}$  innerhalb der Grenzen von 0,1 und 0,2 cm (entsprechend dem Durchmesser des vertikalen K-Na-Dampfstrahls, der größer ist als der Düsendurchmesser von 0,07 cm) und multipliziert diese Werte mit einem Faktor 2, weil die gemessenen Intensitäten aus zwei Volumenelementen des Plasma-Ringes kommen, so erhält man unter Benutzung des vorher angegebenen Rechenganges einschließlich der Korrekturen für das interessierende Beschleunigungsgebiet (von  $\bar{z} = 0,8$  cm bis  $\bar{z} = 3,3$  cm):

$\bar{r}_i$ (cm) \ $\bar{z}$ (cm)	0,57	0,95	1,33	1,71	2,09	
2	0,6	1,0	1,0	0,9	0,6	2
3	0,8	1,1	1,1	1,0	0,7	3
4	1,1	1,2	1,2	1,0	0,8	4
5	1,1	1,2	1,2	1,0	0,8	5
6	1,2	1,3	1,3	1,1	0,8	6
7	1,3	1,4	1,4	1,1	0,8	7
8	1,4	1,5	1,4	1,1	0,8	8
9	1,5	1,6	1,5	1,1	0,8	9
10	1,6	1,6	1,5	1,2	0,7	10
11	1,8	1,7	1,5	1,2	0,7	11
12	1,8	1,6	1,4	1,1	0,6	12
13	1,7	1,6	1,4	1,1	0,6	13
14	1,7	1,5	1,3	1,1	0,6	14
	1	2	3	4	5	$k$
						$i$

Tab. 1.  $\sigma_{o i k} \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}$  (Brenner A). Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit (Maximalamplituden der 30 Hz-Sinus-Komponente).

$$3,1 \cdot 10^{14} \leq N_p \leq 4,3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (\text{Gesamtzahl der Elektronen/cm}^3 \text{ bzw. der Ionen/cm}^3; \text{ zeitlicher Mittelwert}),$$

$$1,2 \cdot 10^{14} \leq N_{p o} \leq 1,7 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (\text{Maximalamplitude der 30 Hz-Sinus-Komponente der Elektronenzahl pro cm}^3 \text{ bzw. der Ionenanzahl/cm}^3),$$

$$4,6 \cdot 10^{11} \leq \sigma \leq 6,3 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (\text{Elektrische Leitfähigkeit, zeitlicher Mittelwert}),$$

$$1,8 \cdot 10^{11} \leq \sigma_o \leq 2,5 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (\text{Maximalamplitude der 30 Hz-Sinus-Komponente der elektrischen Leitfähigkeit})$$

$$\text{für } 0,2 \text{ cm} \geq \Delta \bar{r} \geq 0,1 \text{ cm} \quad (\text{Dicke der strahlenden Schicht}).$$

### c) Magnetfelder

Der registrierte magnetische Fluß  $\Phi_0$  (Maximalamplitude der 30 Hz-Sinus-Komponente) ist als Funktion von  $z$  in Abb. 7 dargestellt. Alle Meßpunkte, bezogen auf jeweils einen Brenner, können während der Dauer eines Versuchs unter gleichbleibenden Bedingungen erfaßt werden. An jedem

Punkt erstreckt sich dabei die Messung über 10 bis 15 Sekunden.

Kurve I zeigt den Verlauf des magnetischen Flusses entlang des Brenners A. Qualitativ — bezüglich des Maximums und der Wendepunkte — stimmt dieses Ergebnis mit dem von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN angegebenen überein. Quantita-

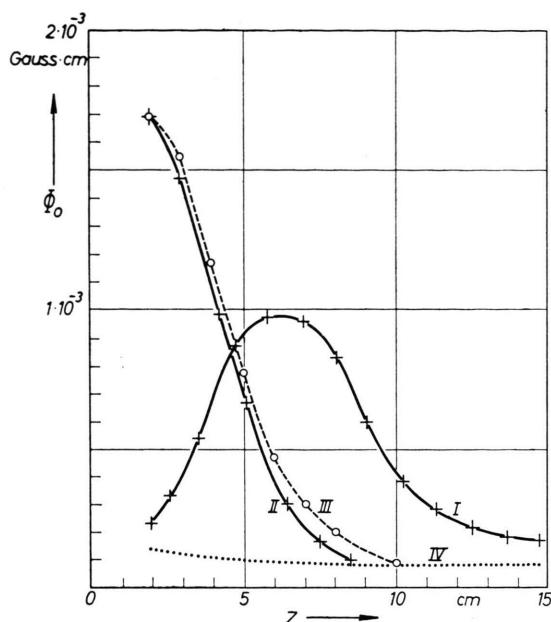


Abb. 7. Verteilung des magnetischen Flusses, I. Brenner A, II. Brenner B, III. Vergleichsspule, IV. Störpegel.

tive Unterschiede sind bedingt durch die verschiedenen geometrischen Dimensionen der Brenner und durch die unterschiedlichen Brenngase, die für die Temperatur maßgebend sind.

Aus der ermittelten Feldrichtung ergibt sich, daß überall die Elektronen gegenüber den Ionen vor-eilen.

Den Verlauf des magnetischen Flusses entlang des Brenners B stellt Kurve II dar. Auch hier eilen die Elektronen vor.

Kurve III zeigt vergleichsweise die gemessene Streufeld-Verteilung, erzeugt von einer 2,5 cm langen zylindrischen Spule mit einem Radius von 1,3 cm. Diese Werte sind identisch mit der Länge und dem Achsenabstand des Volumenelementes, in dem das Plasma des Brenners B beschleunigt wird. Die gute Übereinstimmung der Kurven II und III beweist, daß erwartungsgemäß nur im Beschleunigungsgebiet unterhalb der Düse wesentliche Magnetfelder entstehen; die im übrigen Teil des Brenners registrierten Felder beruhen auf Streuung. Die geringfügigen Abweichungen der beiden Kurven voneinander dürften damit zu erklären sein, daß das Plasma nach der anfänglichen Beschleunigung durch die ständige Reibung im Glasrohr kontinuierlich, wenn auch sehr wenig abgebremst wird, wodurch kleine Magnetfelder entgegengesetzter Richtung her-

vorggerufen werden, die sich den erwähnten Streufeldern überlagern.

Durch die Messungen am Brenner B ist also gleichzeitig der Nachweis erbracht worden, daß in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Plasmagebiet erwartungsgemäß keine Magnetfelder erzeugt werden.

Daß die registrierten Effekte tatsächlich auf diffusionserzeugenden Kräften im Plasma und nicht auf anderen Ursachen beruhen und daß die Größe der Felder auch von der elektrischen Leitfähigkeit abhängt, beweisen folgende Zusatzexperimente und Überlegungen:

1. Unterbricht man die K-Na-Zufuhr, ohne an den übrigen Versuchsbedingungen etwas zu ändern, so nimmt der magnetische Fluß um eine Größenordnung ab. Die Streufelder der in Abschnitt 1 a erwähnten Antriebsmotoren sowie das Störfeld des mit 30 Hz bewegten Einspritzkolbens sind also unwesentlich.

2. Ändert man das Mischungsverhältnis von Wasserstoff zu Sauerstoff und damit die Temperatur im Brenner, so nimmt der magnetische Fluß ebenfalls ab. Für die Größe der Felder spielt also erwartungsgemäß der Ionisationsgrad und damit die Ladungsträgerdichte eine wesentliche Rolle.

3. Zum Beweis dafür, daß beim Einspritzen der K-Na-Legierung keine Ladungstrennung direkt an der Düse erfolgt und somit nicht etwa überschüssige Ladungsträger eines Vorzeichens von den rotierenden Flammgasen mitgeführt werden, dient folgender „kalter“ Versuch: Die Legierung wird ohne Anwesenheit von Wasserstoff und Sauerstoff durch die Düse gespritzt. Der Tropfenstrahl wird in einer isoliert angebrachten Metallschale aufgefangen. Diese Schale und die Düse werden mit einem Ampere-meter verbunden. Bei einer Empfindlichkeit von  $10^{-7}$  A ist kein Ausschlag zu beobachten. Zur Erklärung der gemessenen Magnetfelder wäre aber eine Stromstärke von  $10^{-4}$  A erforderlich. Daß keine Störung der Quasineutralität vorliegt, läßt sich auch aus den Magnetfeldmessungen am Brenner B direkt schließen. Anderenfalls hätten nämlich auch im Bereich der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ströme fließen und Magnetfelder erzeugt werden müssen.

4. Ebenso wenig läßt sich durch die Bewegung der Ladungsträger im Magnetfeld der Erde das Meßergebnis erklären. Bei einer Vertikalkomponente des Erdfeldes von weniger als 0,5 Oersted

müßten nämlich die Ladungsträger eine radiale – völlig unplausible – Geschwindigkeitskomponente von  $10^5$  cm/sec besitzen.

Die Möglichkeit, daß in Verbindung mit der axialen Bewegung der Ladungsträger der Gradient der Horizontalkomponente des Erdfeldes magnetische Flüsse der beobachteten Größe hervorrufen könnte, scheidet ebenfalls aus, weil dafür der gemessene Gradient von  $10^{-3}$  Oersted/cm um vier Zehnerpotenzen zu klein ist.

### 3. Theoretischer Teil

#### a) Beziehung zwischen Stromdichte-Verteilung und magnetischem Fluß

Für den Vergleich von Theorie und Experiment muß zunächst der Zusammenhang zwischen der Stromdichteverteilung  $j(\bar{r}, \bar{z})$  und dem magnetischen Fluß  $\Phi(z)$  hergeleitet werden. Das geschieht zweckmäßigerweise über das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{A}$ ), da wegen der Abwesenheit magnetisierbarer Substanzen die Bedingung  $\text{div } \mathfrak{S} = 0$  erfüllt ist.

Nach dem STOKESSchen Satz gilt

$$\Phi = \int_f \int_f \mathfrak{S}_n df = \int_f \int_f (\text{rot } \mathfrak{A})_n df = \oint_s (\mathfrak{A} d\hat{s}), \quad (3, 1)$$

wobei die Normalkomponente  $\mathfrak{S}_n$  in z-Richtung weist. Mit

$$\text{rot } \mathfrak{S} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j} \quad (3, 2)$$

erhält man für das Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int_V \int \frac{j dV}{r}, \quad (3, 3)$$

wobei  $r$  den Abstand zwischen dem Plasma-Volumenelement  $dV$  und dem Aufpunkt, an dem  $\mathfrak{A}$  berechnet werden soll, bezeichnet. Damit ergibt sich für den magnetischen Fluß die Beziehung

$$\Phi = \frac{1}{c} \oint_s \int_V \int \frac{j dV}{r} d\hat{s}, \quad (3, 4)$$

Aus Gründen der Zylindersymmetrie hängt  $j$  nur von den Koordinaten  $\bar{r}$  und  $\bar{z}$  ab. Der kreisförmige Integrationsweg  $\hat{s}$  ist gegeben durch den mittleren Radius  $a$  der Meßspule. Der Radius der Plasmasäule (= Brenner-Radius) werde mit  $b$  bezeichnet. Mit  $z$  wird der Abstand zwischen der Meßspulenumitte und dem oberen Ende des 20 cm langen Glasrohres angegeben. Dann spezialisiert sich (3, 4) in

Zylinderkoordinaten zu:

$$\Phi(z) = \frac{4\pi a}{c} \cdot \int_{\bar{r}=0}^b \int_{\bar{z}=0}^{20} \int_{\alpha=0}^{\pi} \frac{|j(\bar{r}, \bar{z})| \bar{r} \cdot \cos \alpha d\bar{z} d\bar{r} d\alpha}{\sqrt{a^2 + \bar{r}^2 + (z - \bar{z})^2 - 2a\bar{r} \cos \alpha}}. \quad (3, 5)$$

Unterteilt man das Plasma, wie in Abschnitt 2 b beschrieben, in zylindersymmetrische Volumenelemente, wobei in jedem Element die Stromdichte als konstant angenommen werden soll, und ersetzt man ferner  $\Phi(z)$  durch eine Treppenfunktion, so lassen sich in (3, 5) nach Integration über  $\bar{a}$  die verbleibenden Integrale durch Summenzeichen ersetzen und man erhält

$$\Phi(z_l) = \frac{8\pi a}{c} \sum_k \Delta \bar{z} \sum_i \bar{r}_i |j(\bar{r}_i, \bar{z}_k)| \cdot \frac{2D(k) - K(k)}{\sqrt{(a + \bar{r}_i)^2 + (z_l - \bar{z}_k)^2}} \cdot \Delta \bar{r} \quad (3, 6)$$

mit

$$k^2 = \frac{4a\bar{r}_i}{(a + \bar{r}_i)^2 + (z_l - \bar{z}_k)^2}.$$

$D(k)$  und  $K(k)$  stellen elliptische Integrale dar. Wird  $j$  in elektrostatischen Einheiten angegeben, so erhält man  $\Phi$  in Gauß · cm<sup>2</sup>.

Diejenigen Größen, die nur eine Aussage über die Geometrie des Brenners und den jeweiligen Ort der Meßspule enthalten, lassen sich in einem Koeffizientenschema zusammenfassen:

$$C_{ikl} = \frac{\bar{r}_i [2D(k) - K(k)]}{\sqrt{(a + \bar{r}_i)^2 + (z_l - \bar{z}_k)^2}}. \quad (3, 7)$$

Da die Meßspule wegen ihrer Länge von 2 cm nicht die wirkliche, sondern eine verzerrte Verteilung des magnetischen Flusses in z-Richtung zur Anzeige bringt, sind die Koeffizienten  $C_{ikl}$  mit Ausnahme derjenigen, für die  $k-l=0$  gilt, entsprechend zu korrigieren. Dazu dient ein zweites Koeffizientenschema  $S_{ikl}$ .

Zur Bestimmung von  $S_{ikl}$  werden nacheinander die Magnetfluß-Verteilungen an mehreren stromdurchflossenen Drahtschleifen mit verschiedenen Radien in z-Richtung gemessen und mit den Koeffizienten  $C_{ikl}$  verglichen.

Mit  $a = 3$  cm und  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec erhält man schließlich

$$\Phi(z_l) = 2,5 \cdot 10^{-9} \sum_k \Delta \bar{z} \sum_i S_{ikl} \cdot C_{ikl} |j(\bar{r}_i, \bar{z}_k)| \Delta \bar{r}. \quad (3, 8)$$

Gl. (3, 8) bestimmt also bei gegebener Stromdichteverteilung  $j(\bar{r}_i, \bar{z}_k)$  die zu messende Verteilung des magnetischen Flusses  $\Phi(z_l)$ .



$\bar{r}_i$ (cm) (cm) $ \bar{z}_k - z_1 $	0,57	0,95	1,33	1,71	2,09	
0	0,03	0,08	0,17	0,29	0,50	0
1	0,03	0,07	0,15	0,25	0,42	1
2	0,02	0,05	0,11	0,17	0,26	2
3	0,01	0,03	0,07	0,11	0,17	3
4		0,02	0,04	0,07	0,11	4
5		0,01	0,03	0,04	0,07	5
6			0,02	0,03	0,04	6
7			0,01	0,02	0,03	7
8				0,01	0,02	8
9					0,01	9
	1	2	3	4	5	$ k-1 $ $i$

Tab. 2. Koeffizientenschema  $S_{ikl} \cdot C_{ikl}$  (Gewichtsfaktoren) bei  $\Delta r = 0,38$  cm und  $\Delta z = 1$  cm.

Die in Tab. 2 wiedergegebenen Produkte aus den Koeffizienten  $S_{ikl}$  und  $C_{ikl}$  stellen gemäß (3, 8) die Gewichtsfaktoren dar, mit denen die Stromdichten in den einzelnen Plasma-Volumenelementen, bezogen auf den Ort der Meßspule, zu multiplizieren sind. Alle Werte, die unter 2% vom Maximalwert liegen, sind dabei vernachlässigt worden. Diese Tabelle dient zur Berechnung der magnetischen Flüsse im Brenner A.

Spezialisiert man (3, 5) auf die Verhältnisse einer kreisförmigen, zur Meßspule konzentrischen Drahtschleife mit dem Radius  $b$ , die von einem Strom der Stärke  $I$  [A] durchflossen wird, so braucht nur über  $\bar{a}$  integriert zu werden und man erhält:

$$\Phi(z) = 7,5 \cdot \frac{2 D(k) - K(k)}{\sqrt{(3+b)^2 + z^2}} b I \quad [\text{Gauß} \cdot \text{cm}^2] \quad (3, 9)$$

$$\text{mit} \quad k^2 = 12 b / [(3+b)^2 + z^2],$$

wobei  $z$  den Abstand zwischen der Drahtschleifen-Ebene und der Meßspulen-Mitte angibt.  $D(k)$  und  $K(k)$  stellen wieder die erwähnten elliptischen Integrale dar. Gl. (3, 9) wird zur Eichung der elektronischen Meßanlage benutzt.

*b) Vergleich der Ergebnisse mit der Theorie von  
BIERMANN und den Messungen von SCHILLING  
und LOCHTE-HOLTGREVEN*

SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN interpretierten die Entstehung der von ihnen gemessenen Magnetfelder nach der Theorie von BIERMANN<sup>1</sup>. Deshalb soll zunächst versucht werden, die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ebenso zu deuten.

BIERMANN zeigt, daß im Falle potentialloser Beschleunigungen  $g^*$  in einem *nur aus Ionen und Elek-*

*tronen* bestehenden Plasma eingeprägte elektromotorische Kräfte der Größe

$$e \cdot \bar{f}^* = \bar{m} g^*; \quad \bar{m} = \frac{m_i + m_e}{2} \approx \frac{m_i}{2} \quad (3, 10)$$

mit  $m_i = 6,5 \cdot 10^{-23}$  g (Ionenmasse von Kalium) auftreten müssen, die (wegen  $\text{rot } g^* \neq 0$ ) nicht durch elektrostatische Kräfte kompensiert werden können. Es müssen also Ströme

$$\vec{j} = \sigma \bar{f}^* = \frac{\sigma \bar{m} g^*}{e} \quad (3, 11)$$

fließen, die Magnetfelder erzeugen.

Mit Hilfe dieser Beziehung soll in Verbindung mit (3, 8) der zu erwartende magnetische Fluß im Brenner A an der Stelle  $z = 6$  cm berechnet werden:

$$\Phi_0(z_6 = 6 \text{ cm}) = 9,5 \cdot 10^{-10} \frac{\bar{m}}{e} \sum_k \sum_i S_{ik6} C_{ik6} \sigma_{oik} g_k^* \quad (3, 12)$$

(Entsprechend der früher erwähnten Unterteilung des Brenners in zylindersymmetrische Volumenelemente wurden folgende Zahlenwerte in (3, 8) eingesetzt:  $\Delta r = 0,38$  cm,  $\Delta z = 1$  cm).

Die Werte für  $\sigma_{oik}$  und  $S_{ik6} \cdot C_{ik6}$  werden aus den Tab. 1 und 2 entnommen, die Werte für  $g_k^*$ , die für die Außenbezirke des Plasmas gelten, aus Abb. 6. Für die inneren Bereiche des Brenners sollen die gleichen Werte  $g_k^*$  benutzt werden, obwohl anzunehmen ist, daß die Beschleunigungen im achsen-nahen Gebiet geringer werden. Der dadurch eventuell verursachte Fehler dürfte nicht erheblich sein, weil gerade die achsennahen Plasmabezirke nur einen relativ geringen Beitrag zum magnetischen Fluß liefern. Auf jeden Fall wird der so errechnete Wert

$$\Phi_0(z = 6 \text{ cm}) = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2$$

durch den Fehler in den Beschleunigungen eher zu groß als zu klein sein. Der Fehler bei den elektrischen Leitfähigkeiten beträgt nach Abschnitt 2 b  $\pm 25\%$ , so daß der oben berechnete Wert für  $\Phi_0$  höchstens mit einem Fehler von einem Faktor 2 behaftet sein dürfte.

Der Meßwert an der Stelle  $z = 6$  cm beträgt aber nach Abb. 7, Kurve I,  $10^{-3}$  Gauß  $\cdot$  cm<sup>2</sup>, so daß sich eine Abweichung um einen Faktor 40 ergibt.

Im Vergleich dazu entnimmt man der Arbeit von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN, daß deren Meßergebnis nur um einen Faktor 2 über dem nach BIERMANN berechneten Wert lag. Zur Klärung dieses Unterschiedes zwischen der damaligen und der vorliegenden Arbeit muß erwähnt werden, daß SCHIL-

LING und LOCHTE-HOLTGREVEN einige Vereinfachungen vorgenommen haben, wobei die Nichtstationarität der Strömungsverhältnisse und Magnetfelder als Fehlerquelle hier außer acht gelassen werden soll:

1. An Stelle von magnetischen Flüssen, die tatsächlich gemessen werden, wurde mit magnetischen Feldstärken gearbeitet. Dabei wurde  $|\text{rot } \vec{\zeta}| \approx H/r$  gesetzt, wodurch Fehler unvermeidbar sind.

2. Durch Sondenmessungen wurde nur der zeitliche und räumliche Mittelwert der elektrischen Leitfähigkeit ermittelt, nicht aber die ortsabhängige, für die Erzeugung der magnetischen Wechselfelder maßgebliche Sinus-Komponente.

Um den Einfluß dieser Fehlerquellen zu prüfen, werden die Meßergebnisse der vorliegenden Arbeit vergleichsweise nach dem vereinfachten Verfahren von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN ausgewertet, nachdem zuvor eine Umeichung der elektronischen Meßanlage in Einheiten der magnetischen Feldstärke vorgenommen wird.

Dabei zeigt sich, daß nunmehr das theoretisch berechnete Magnetfeld nur noch um einen Faktor 2,5 unter dem gemessenen Wert liegt. Dieses Verhältnis stimmt fast mit dem von SCHILLING und LOCHTE-HOLTGREVEN gefundenen Verhältnis überein, so daß die früheren Feldstärkemessungen als durchaus bestätigt betrachtet werden können. Diese Tatsache täuscht jedoch nicht darüber hinweg, wie bei der vorhergehenden exakteren Rechnung gezeigt wurde, daß die nur für ein vollionisiertes Plasma gültige Theorie von BIERMANN sich nicht auf die vorliegenden Experimente anwenden läßt.

Es soll deshalb versucht werden, die Ergebnisse nach SCHLÜTER zu interpretieren, wobei nunmehr die Neutralgaskomponente, die das Plasma überhaupt erst beschleunigt, vollauf berücksichtigt wird.

### c) Theoretische Deutung der Ergebnisse mit Hilfe der Theorie von SCHLÜTER

Als Modell eines Plasmas betrachtet SCHLÜTER eine Flüssigkeit, die aus drei Komponenten (Ionen, Elektronen und Neutralteilchen) besteht<sup>2</sup>. Die von ihm aufgestellten Gleichungen für die Impulsbilanzen (die Impulsübertragung zwischen den einzelnen Komponenten ist proportional ihren Geschwindigkeitsdifferenzen) lassen sich hier vereinfachen, weil

1. keine äußeren elektrischen und magnetischen Felder gegeben sind,

2. die magneto-hydrodynamische Rückwirkung der erzeugten Magnetfelder unwesentlich ist,

3. die Gradienten der Partialdrucke zu vernachlässigen sind,

4. äußere, für die Entstehung der Magnetfelder verantwortliche Kräfte fehlen:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} + N_p \alpha_{ie} (v_i - v_e) + N_n \alpha_{in} (v_i - v_n) = 0, \quad (3, 13a)$$

$$m_e \frac{dv_e}{dt} + N_p \alpha_{ie} (v_e - v_i) + N_n \alpha_{en} (v_e - v_n) = 0, \quad (3, 13b)$$

$$m_n \frac{dv_n}{dt} + N_p \alpha_{in} (v_n - v_i) + N_p \alpha_{en} (v_n - v_e) = 0. \quad (3, 13c)$$

Die gegenseitige Diffusion von Elektronen und Ionen wird also im vorliegenden Falle durch die innere Reibung der drei Komponenten beschrieben.  $v_i$ ,  $v_e$ ,  $v_n$  sollen (im Sinne der Hydrodynamik) die Tangential-Komponenten der Geschwindigkeiten im Brenner bezeichnen, da nur diese für die Erzeugung der gemessenen Magnetfelder interessant sind. Die Koeffizienten der Kopplungsglieder hängen mit den mittleren Stoßfrequenzen  $\gamma$  wie folgt zusammen:

$$\alpha_{ie} = \gamma_{ie} \frac{m_i m_e}{\varrho_i + \varrho_e}; \quad \alpha_{in} \text{ und } \alpha_{en} \text{ entsprechend.} \quad (3, 14)$$

(Die Zahlenwerte für diese Koeffizienten und deren Abhängigkeit von  $T$  und  $N_p$  wurden in Abschnitt 2 b bereits angegeben.)

Die Gln. (3, 13) sollen nun auf die Verhältnisse im Brenner B (wegen der im Gegensatz zum Brenner A übersichtlicheren Anfangsbedingungen) angewendet werden.

Aus (3, 13) erhält man

$$N_p (m_i v_i + m_e v_e) + N_n m_n v_n = \text{const.} \quad (3, 15)$$

Für  $t=0$  gilt  $v_i = v_e = 0$  und  $v_n = v_{n0}$ .

Wegen  $N_n \gg N_p$ ,  $v_i \leq v_n$ ,  $v_e \leq v_n$  ergibt sich  $v_n = v_{n0} = \text{const}$ , das heißt: die Geschwindigkeit des Neutralgases ändert sich durch die Stöße mit den Ladungsträgern praktisch nicht.

In (3, 13 a und b) lassen sich noch die Reibungskräfte zwischen Ionen und Elektronen vernachlässigen wegen

$$\frac{N_n \alpha_{in}}{N_p \alpha_{ie}} > 10^3 \quad \text{und} \quad \frac{N_n \alpha_{en}}{N_p \alpha_{ie}} > 6.$$

Diese Vereinfachung wirkt sich auf  $v_i(t)$  nicht aus und auf  $v_e(t)$  erst dann merklich, wenn  $v_e$  etwa den Wert  $0,75 v_n$  überschritten hat. Der dadurch entstehende Fehler von etwa 20% in der Stromdichte  $j$  wird bei der numerischen Auswertung von (3, 18) berücksichtigt.

Als Lösungen der Gln. (3, 13 a und b) ergeben sich bei Vernachlässigung der Ladungsträger-Reibung:

$$v_i(t) = v_n \left( 1 - e^{-\frac{N_n \alpha_{in}}{m_i} t} \right) \approx v_n (1 - e^{-\gamma_{in} t}), \quad (3, 16a)$$

$$v_e(t) = v_n \left( 1 - e^{-\frac{N_n \alpha_{en}}{m_e} t} \right) \approx v_n (1 - e^{-\gamma_{en} t}). \quad (3, 16b)$$

Zur Berechnung der Stromdichte-Verteilung  $j(s)$  interessieren aber die Geschwindigkeiten als Funktionen des Ortes. Dazu werden zunächst die von den Ionen und Elektronen in der Zeit  $t$  zurückgelegten Wege berechnet:

$$s_i(t) = \int_0^{s_i} ds_i = \int_0^t v_i(t) dt = v_n \left[ t - \frac{1}{\gamma_{in}} (1 - e^{-\gamma_{in} t}) \right], \quad (3, 17a)$$

$$s_e(t) = \int_0^{s_e} ds_e = \int_0^t v_e(t) dt = v_n \left[ t - \frac{1}{\gamma_{en}} (1 - e^{-\gamma_{en} t}) \right]. \quad (3, 17b)$$

Über den Parameter  $t$  sind damit  $v_i(s)$  und  $v_e(s)$  gegeben. Der Weg  $s$  erstreckt sich von dem verdampfenden Strahl der Legierung ( $s_0=0$ ) in tangentialer Richtung des Brenners. Die Krümmung der Bahn braucht wegen der Kürze der Beschleunigungsstrecke nicht berücksichtigt zu werden.

Die gesuchte Stromdichte  $j_0(s)$  (Maximalamplitude der 30 Hz-Sinus-Komponente) ergibt sich

schließlich zu:

$$j_0(s) = e N_{p0} [v_i(s) - v_e(s)]. \quad (3, 18)$$

Mit den in Abschnitt 2 angegebenen Werten

$$1,2 \cdot 10^{14} \leq N_{p0} \leq 1,7 \cdot 10^{14} \text{ cm}^3,$$

$$v_e = 10^4 \text{ cm/sec},$$

$$0,2 \text{ cm} \geq \Delta r \geq 0,1 \text{ cm},$$

$$\Delta z = 2,5 \text{ cm} \quad (\text{Abb. 5})$$

berechnet man für die Stelle  $z = 2 \text{ cm}$  einen zu erwartenden magnetischen Fluß von

$$1,8 \cdot 10^{-3} \geq \Phi_0 \geq 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2$$

für  $0,2 \geq \Delta r \geq 0,1 \text{ cm}$ .

Aus Abb. 7, Kurve II, ist zu entnehmen, daß der Meßwert an der Stelle  $z = 2 \text{ cm}$   $1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2$  beträgt und damit innerhalb des berechneten Intervalls liegt.

Auch die experimentell ermittelte Stromrichtung (Elektronen voreilend) stimmt mit dem Ergebnis der theoretischen Betrachtung überein. Damit ist gezeigt worden, daß die gemessenen Felder sich auf der Grundlage des SCHLÜTERSchen Modells erklären lassen.

Herrn Dr. E. RICHTER vom Institut für Theoretische Physik danken wir für eingehende Diskussionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft ist der erste der Verfasser für wirtschaftliche Unterstützung, die bei der Durchführung dieser Arbeit gewährt wurde, dankbar.

## Untersuchungen an Balmer-Spektren bei einer Hochfrequenzentladung\*\*

Von H. SCHLÜTER \*\*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforschg. 16 a, 972—984 [1961]; eingegangen am 16. Juni 1961)

With an rf-discharge an extremely clean BALMER-spectrum is obtained having a line-melting at the principal quantum number 20. Electron temperature, gas temperature, and electron density are determined. The ionization-recombination-balance is considered with a modified form of the Corona-ionization-formula.

Die folgenden Untersuchungen zielen darauf ab, kontrollierbare Versuchsbedingungen zu gewinnen, die ausgedehnte spektroskopische Messungen an Wasserstoffplasmen geringer Dichte (in der Größenordnung  $10^{13}$  Elektronen/cm<sup>3</sup>, wie sie bei vielen Plasmauntersuchungen vorliegen) zulassen. Frühe Untersuchungen von HERZBERG im Jahre 1927 haben

gezeigt, daß sich elektrodenlose Hochfrequenzringentladungen grundsätzlich dafür eignen. Die damaligen experimentellen Möglichkeiten reichten jedoch nicht für quantitative Messungen bei definierten und konstanten Bedingungen aus. Die Untersuchungen von HERZBERG sind seither nicht mehr wesentlich verbessert worden. Hauptzweck der vor-

\* Dissertation, Universität München, April 1961.

\*\* Zur Zeit The University of Texas, Austin.